LINALG1 UE WS03/04

CLEMENS FRUHWIRTH

1.1.1

a)
$P(x) : \forall y : y < x$
$\neg P(x) : \exists y : y > x$
$A : \exists x : P(x)$
$\neg A : \neg(\exists x : P(x)) \rightarrow \forall x : \neg P(x)$
$B : P(0)$
$\neg B : \neg P(0) \rightarrow \exists y : y > 0$
$C : x = 1 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0$
$\neg C : x = 1 \wedge x^2 + x + 1 \neq 0$
$D : x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$
$\neg D : x^2 + x + 1 = 0 \wedge x \neq 1$
b) Da alle Bedingungen für die Implikationen falsch sind, sind alle Aussagen wahr. Kontrapositionen zu $A \rightarrow B$ ist: $\neg A \rightarrow \neg B$

1.1.2

40, denn nur eine gerade Anzahl ermöglich ein stehts abwechselndes Wahrheit/Lüugner Muster, dass notwendig ist wenn alle auf die Frage ist ihr linker Nachbar ein Luegner mit Ja antworten sollen.

1.1.3

a) Fuehrt der linke Weg nach Ansicht deines Bruders nach Oberstockstall?
Eine falsche Antwort impliziert dass der linke Weg nach Oberstockstall fuehrt.
b) Antwort auf die ersten Frage bei möglicher Anordnung der Personen P1,P2,P3.
w = Wahrheitsprechender h = Schwankender/Halbwahrheit f = Lügner

P1	P2	P3	Antwort
w	h	f	ja
w	f	h	nein
h	w	f	ja/nein
h	f	w	ja/nein
f	w	h	nein
f	h	w	ja

Aufgeschlüsselt nach Antworten ja/nein:
Ja:

P1	P2	P3	Antwort
w	h	f	ja
h	w	f	ja/nein
h	f	w	ja/nein
f	h	w	ja

Nein:

P1	P2	P3	Antwort
w	f	h	nein
h	w	f	ja/nein
h	f	w	ja/nein
f	w	h	nein

Jetzt sieht man, dass im Ja-Fall an Stelle 3 nie der Schwankende sitzt, im Nein-Fall nie der Schwankende an zweiter Stelle. Diesen fragt man dann analog zu a): "Führt nach Ansicht des Bruders, der hier genauso lange wohnt wie du, der linke Weg nach Oberstockstall".

1.2.1

Für A = B muss gelten, $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ und um zu zeigen, dass $A \subseteq B$ muss $x \in A \rightarrow x \in B$.

a)

Behauptung: $\bigcup(A_i|i \in \mathbb{N}) = \mathbb{Z}$

Beweis: $\bigcup(A_i|i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt Aufgrund der Angabe füer jedes A_i gilt $A_i \subseteq \mathbb{Z}$.

Für $\mathbb{Z} \subseteq \bigcup(A_i|i \in \mathbb{N})$ genügt es Aufgrund der Vereinigung zu zeigen, dass es ein A_j gibt für das gilt $x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in A_j$. Das ist leicht gefunden, wenn man steht für A_j $A_{|x|}$ nimmt. D.h. $x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in A_{|x|}$

b) $\bigcap(A_i|i \in \mathbb{N}) = \{0\}$

c) $\bigcup(A_i|i \in 2\mathbb{N}+1) = \mathbb{Z}$

d) $\bigcap(A_i|i \in 2\mathbb{N}+1) = \{-1, 0, 1\}$

1.2.2

a)

$J = \{x \in \mathbb{R}|x > 1\}$

$j \in J$

$K_j = \{(x_1, x_2)|(x_1 - j)^2 + x_2^2 < j^2\}$

$H = \{(x_1, x_2)|x_1 > 0\}$

Zu zeigen ist: $\bigcup K_j = H$. D.h. $\bigcup K_j \subseteq H \wedge H \subseteq \bigcup K_j$

FIXME

b)

1.3.1

({1}{2}{3}, {12}{3}, {13}{2}, {1}{23}, {123})

Es gibt 5.

1.3.2

a)

$xRy \rightarrow yRx$

$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

(1) in (2)

$yRx \wedge yRz \rightarrow xRz$

b) 1,2,3,4 1R2 2R1 1R3 3R1 2R3 3R2

oder in worten blutsverwandt.

1.3.3

1.3.4

α: reflexiv: $\forall a : (a, b)R(a, b)$ gilt weil $ab = ba$

symmetrisch: $(a, b)R(c, d) \rightarrow (c, d)R(a, b)$ gilt weil $ad = bc \rightarrow cb = da$

transitiv: $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \rightarrow (a, b)R(e, f)$ gilt weil

$$\begin{aligned} (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) &\to \\ ad = bc \wedge cf = de &\to \\ ad = bc \wedge c = \frac{de}{f} &\to \\ ad = b\frac{de}{f} &\to \\ a = b\frac{e}{f} &\to \\ af = be &\to \\ (a,b)R(e,f) \end{aligned}$$

Bijektion FIXME
β: reflexiv: $\forall a : (a,b)R(a,b)$ gilt weil $a + b = b + a$
symmetrisch: $(a,b)R(c,d) \to (c,d)R(a,b)$ gilt weil $a + d = b + c \to c + b = d + a$
transitiv: $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \to (a,b)R(e,f)$ gilt weil

$$\begin{aligned} (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) &\to \\ a + d = b + c \wedge c + f = d + e &\to \\ a + d = b + c \wedge c = d + e - f &\to \\ a + d = b + d + e - f &\to \\ a = b + e - f &\to \\ a + f = b + e &\to \\ (a,b)R(e,f) \end{aligned}$$

1.3.5

a) reflexiv: $a_{ii} = 1$ oder in worten: matrix enthält die einheitsmatrix.
symmetrisch: $(a_{ij} = 1 \to a_{ji} = 1)$ oder in worten: matrix gespiegelt an der hauptachse.
transitiv:
b) α : falsch weil nicht reflexiv
β : wahr
γ : wahr
σ : falsch weil nicht symmetrisch.
ϵ : wahr
ζ : falsch weil nicht ref., sym., trans.

1.4.1

α: Eine Abbildung ist für jedes Element der Definitionsmenge definiert. Die Abbildungvorschrift ist jedoch im Punkt $x = -1$ nicht definiert.
Modifikation: $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$
β: Die Menge der rationalen Zahlen enthält alle Zahlen mit endlicher Dezimalstellen entwicklung. $\sqrt{2}$ ist aber keine solche.
Modifikation: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
γ :

1.4.2

a) injektiv
c) bijektiv

d) Für $|M| = 1$ bijektiv. Sonst surjetiv.
g) nichts.

1.4.4

Es gibt zwei unterschiedliche Abbildungen g, g' so dass $g \circ f = g' \circ f = id_{\mathbb{N}}$n

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{wenn } \exists n \in \mathbb{N}, x = n^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{wenn } \exists n \in \mathbb{N}, x = n^2 \\ 4711 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung h existiert nicht, da die Umkehrfunktion f^{-1} nämlich $\sqrt{x}n$ zuerst auf $\mathbb{R}$ abbilden müsste damit dies möglich ist.

1.4.5.

Satz: Ist $a = b$ so ist stets $f(a) = f(b)$
α : Zu Beweisen: $f(a) = f(b) \to a = b$ wenn $g(f(a)) = g(f(b)) \to a = b$
$f(a) = f(b) \overset{\text{laut Satz.}}{\to} g(f(a)) = g(f(b)) \to a = b$

1.5.1

Eine Wohlordnung ist eine Totalordnung dass für jede beliebige Teilmenge eine minimalstes Element besitzt. Um zu beweisen dass Ω_1 eine Totalordnung ist muss zuerst bewiesen werden dass auch eine Halbordnung vorliegt.
reflexiv: $\forall a : aRa$ gilt weil $a \leq a \Leftrightarrow a < a \vee a = a$ und $a = a$ stets wahr.
antisymmetrisch: $\forall a, b : aRb \wedge bRa \to a = b$ FIXME
transitiv: $aRb \wedge bRc \to aRc$
Zu Beweisenn: $(a < b \vee a = b) \wedge (b < c \vee b = c) \to (a < c \vee a = c)$
Trivial für $a = b \wedge b = c$ oder $a = b \wedge b < c$ oder $a < b \wedge b = c$.
Für $a < b \wedge b < c \to a < c$ gilt offensichtlich da wenn
$p(w) = a_0 w^{n_0} + ..a_k w^{n_k}$,
$q(w) = b_0 w^{m_0} + ..b_l w^{m_l}$,
$r(w) = c_0 w^{o_0} + ..c_i w^{o_i}$,

Für ($n_k < m_l$ und $m_l < o_i$) oder ($n_k < m_l$ und $m_l = o_i$) oder ($n_k = m_l$ und $m_l < o_i$) gilt offensichtlich $n_k < o_i$ und damit $a \leq c$. Für $n_k = m_l$ und $m_l = o_i$, muss gelten $a_k < b_l$ und $b_l < c_i$. Weiters folgt daraus $a_k < c_i$ und deswegen gilt auch $a \leq c$.

Die Eigenschaft der Totalordnung ergibt sich für unterschiedliche Elemente daraus, dass $\langle \mathbb{N}_0, < \rangle$ eine Totalordnung bildt und somit jeder in der Relationsdefinition angeführte Vergleich $<$ definiert ist. Gleiche Elemente sind ohnedies in der Relation enthalten.

Bleibt zu zeigen dass Ω_1 eine Wohlordnung ist. Das ergibt sich ebenfalls daraus dass $\langle \mathbb{N}_0, < \rangle$ die Eigenschaft eine Wohlordnung ist und damit dass selbe auf

1.5.7

a) f ist eine Bijektion falls eine invers Funktion f^{-1} existiert.
$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ ist definiert für alle $b \in \mathbb{R}$ und für alle $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
b) $\#[c, d] = \#[0, 1]$ dann wenn eine Bijektion von $[c, d]$ auf $[0, 1]$ existiert. Die ist leicht mit der Funktion aus a) mit $a = \frac{1}{d-c}, b = -c$ gefunden.

c) Da für jedes i: $\#[c_i, d_i] = \#[0,1]$, wenn $c_i < d_i$, gilt auch $\#[c_1, d_1] = \#[0,1] = \#[c_2, d_2]$.

d) Die Folge die alle Zahlen im Interval [0,1] umfasst ist:

$$f_0 = 1$$
$$f_1 = \frac{1}{2}$$
$$f_{2n} = f_n - (\frac{1}{2})^{n+1}$$
$$f_{2n+1} = f_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$$

Die Folge die alle Zahlen im Interval [0,1) umfasst ist:

$$g_0 = \frac{1}{2}$$
$$g_{2(n+1)} = g_(n+1) - (\frac{1}{2})^{n+2}$$
$$g_{2(n+1)} = g_(n+1) + (\frac{1}{2})^{n+2}$$

Die gesuchte Bijektion, die $\#[0,1] = \#[0,1)$ beweisst ist $B = \{(f_n, g_n) | n \in \mathbb{N}\}$.

2.1.1

α: kommutative Halbgruppe.
γ: kommutative Gruppe
δ: kommutativer Monoid
ζ: uga

2.1.3

a)

	1
1	1

	12	21
12	12	21
21	21	12

b) Die Permutationen $(2143), (4321), (3412)$ erfüllen $f \circ f = id_{\{1,2,3,4\}}$. Gemeinsam mit der Identität sind die Permutationen Untergruppen von S_4 da die Identität das neutrale Element ist und alle Elemente zu sich selbst das inverse.

2.1.7

a)

$$x = (c * d)$$
$$a * (b * (c * d)) =$$
$$a * (b * x) =$$
$$(a * b) * x =$$
$$(a * b) * (c * d)$$

$$\begin{aligned}
y &= (b * c) \\
a * (b * (c * d)) &= \\
a * ((b * c) * d &= \\
a * (y * d) &= \\
(a * y) * d &= \\
(a * (b * c)) * d &= \\
((a * b) * c) * d &
\end{aligned}$$

b) FIXME

2.1.9

Assoziativ: an den eigenschaften der funktion ändert sich nichts. FIXME

Existenz eines neutralen elements: Laut Satz 2.3 gibt es nur ein neutrales Element. Da für alle Untergruppen die Bedingung aufrecht ist, dass in Ihnen das neutrales Element enthalten ist, muss in der Vereinigung all diese Mengen dieses Element auch enthalten sein.

Existenz eines inverse Elements: Da es zu jedem Element in der Menge der Mengenfamilie ein Inverselement gibt, muss die Folge auch zwingend

2.1.11

a) $z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Assoziativ:

Existenz des neutrales Elements: $(1, 0)$ [1] ist enthalten da $1 = \sqrt{(}1^2 + b^2)$

Existenz eines inversen Elements: Es ist zu zeigen dass es ein c,d gibt für das unter der Voraussetzung $1 = \sqrt{a^2 + b^2}$,n $(a, b)(c, d) = (1, 0)$ und $1 = \sqrt{c^2 + d^2}$ gilt.

Lösung des Gleichungssytem $ac - bd = 1, ad + bc = 0$ nach c,d:

$$\begin{aligned}
c &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\
d &= \frac{-b}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \sqrt{(\frac{a}{a^2 + b^2})^2 + (\frac{-b}{a^2 + b^2})^2} \\
1 &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\
1 &= \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}} \\
1 &= \frac{1}{a^2 + b^2} \\
a^2 + b^2 &= 1 \\
\sqrt{a^2 + b^2} &= 1
\end{aligned}$$

b) $\langle i \rangle = \{a^i | i \in \mathbb{Z}\}$

Für ein beliebiges $a + bi = (a, b)$ gilt:

[1](a,b)(c,d)=(a,b) impliziert das Gleichungssystem $ac - bd = a, ad + bc = b$

$$(a, b)(a, b) = (a^2 - b^2, 2ab)$$

Der absolut Betrag von $(a^2 - b^2, 2ab)$ lautet $\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2}$ und dass das für alle a, b in U liegt beweisst:

$$\begin{aligned}
1 &= \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} \\
1 &= \sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2} \\
1 &= \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2b^2} \\
1 &= \sqrt{(a^2 + b^2)^2} \\
1 &= a^2 + b^2 \\
1 &= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

c) Ja diese Aussage gilt analog dazu auch für $\mathbb{R}$. Allerdings enthält ist die Untergruppe trivial mit e.