ANALYSIS 1 UE WS03/04

CLEMENS FRUHWIRTH

Persönliche Ausarbeitung. Veröffentlich in der Hoffnung Anderen damit weiterzuhelfen. Angaben zu finden auf http://clemens.endorphin.org/tm/analysis1/

Beispiel 1. Hypothese:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n + 1))$$

Induktionsbasis: $-1^0 = 1 = \frac{1}{4}4 = \frac{1}{4}(1+3) = \frac{1}{4}(1+1*(2+1) = \frac{1}{4}(1+(-1)^0(2*1+1))$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1}[(-1)^{k-1}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k-1}] + (-1)^n(n+1) \overset{\text{Hyp.}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)) + (-1)^n(n+1)) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + (-1)^n(-2n-1) + (-1)^n(4n+4) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + (-1)^n(-2n-1+4n+4) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + (-1)^n(2n+3) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + (-1)^n(2(n+1)+1)$$

Beispiel 2. Hypothese:

$$\sum_{k=1}^{n}[k(k+1)] = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Induktionsbasis: $1(1+1) = 1*2 = \frac{1}{3}1*2*3$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1}[k(k+1)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[k(k+1)] + (n+1)(n+2) \overset{\text{Hyp.}}{=}$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) =$$

$$= (\frac{1}{3}n+1)(n+1)(n+2) =$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) =$$

Beispiel 3. Hypothese:

$$\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{4k^2-1}] = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

Induktionsbasis:
Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1}[\frac{1}{4k^2-1}] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{4k^2-1}] + \frac{1}{4(n+1)^2-1} \overset{\text{Hyp.}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}) + \frac{1}{4(n+1)^2-1} =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}) + \frac{1}{4n^2+8n+3} =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{4n^2+8n+3)} =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}) =$$
$$= \frac{1}{2}(1+\frac{2-2n-1}{(2n+1)(2n+3)}) =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{2n+1}{(2n+1)(2n+3)}) =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+3})$$

Beispiel 4. Hypothese:

$$\prod_{k=2}^{n}[1-\frac{2}{k(k+1)}] = \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n})$$

Induktionsbasis:

Induktionsschritt:

$$\prod_{k=2}^{n+1}[1-\frac{2}{k(k+1)}] =$$
$$= \prod_{k=2}^{n}[1-\frac{2}{k(k+1)}](1-\frac{2}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{Hyp.}}{=}$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n})(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{4}{n(n+1)(n+2)})) =$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{4}{n(n+1)(n+2)})) =$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n+1}(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n(n+2)})) =$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n+1}(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+2)}-\frac{n}{n(n+2)}-\frac{2}{n(n+2)})) =$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n+1}(\frac{(n^2+3n+2-n-2}{n(n+2)})) =$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n+1}(\frac{n^2+2n}{n^2+2n})) =$$
$$= \frac{1}{3}(1+\frac{2}{n+1})$$

Beispiel 5. a)

Hypothese:

$$P(n): n^3-n \equiv 0 \pmod 6$$

Induktionsbasis:

Induktionsschritt:

$$(n+1)^3-(n+1) \equiv$$
$$\equiv n^3+3n^2+3n+1-(n+1) \pmod 6 \equiv$$
$$\equiv n^3+3n^2+3n-n \pmod 6 \equiv$$
$$\equiv (n^3-n \pmod 6)) + (3n^2+3n \pmod 6)) \pmod 6 \overset{\text{Hyp.}}{\equiv}$$
$$\equiv 0 + (3n^2+3n \pmod 6)) \pmod 6$$

$P(n) \to P(n+1)$ gilt, falls $(3n^2+3n \pmod 6) \equiv 0$ gilt. Beweis für $3n^2+3n \pmod 6 \equiv 0$ mittels Induktion:

Induktionsbasis:

Induktionsschritt:

$$3(n+1)^2+3(n+1) \pmod 6 \equiv$$
$$3n^2+6n+3+3n+3) \pmod 6 \equiv$$
$$(3n^2+3n \pmod 6))(6n+6 \pmod 6)) \pmod 6 \equiv$$
$$0+(6n+6 \pmod 6)) \pmod 6 \equiv$$
$$6n+6 \pmod 6 \equiv 0$$

b) Kurzform: $n^5-n \equiv 0 \pmod{30}$ ist bewiesen wenn gilt, $5n^4+10n^3+10n^2+5n \equiv 0 \pmod{30}$ ist bewiesen wenn gilt, $20n^3+70n \equiv 0 \pmod{30}$ ist bewiesen wenn gilt, $60n^2+60n+90 \equiv 0 \pmod{30}$

Beispiel 6.

$$a_0 = 2$$
$$a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$$

Hypothese:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

Induktionsbasis:
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{\text{Rek.}}{=} \\ = 2 - \frac{1}{a_n} &\overset{\text{Hyp.}}{=} \\ = 2 - \frac{n+1}{n+2} &= \\ = \frac{2(n+2)-(n+1)}{n+2} &= \\ = \frac{2n+4-n+1}{n+2} &= \\ &= \frac{n+3}{n+2} \end{aligned}$$

Beispiel 7.

$$a_0 = 1$$
$$a_n = a_0 + a_1 + a_2 \cdots a_{n-1}$$

Hypothese:

$$a_n = 2^{n-1}$$

Induktionsbasis:
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \\ = \overbrace{a_0 + a_1 + a_2 \cdots a_{n-1}}^{a_n} + a_n &= \\ = 2a_n &\overset{\text{Hyp.}}{=} \\ = 2 * 2^{n-1} &= \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Beispiel 8.

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Hypothese:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$$
$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Induktionsbasis:

Induktionsschritt:

$$f_{n+1} \overset{\text{Rek.}}{=} f_n + f_{n-1} \overset{\text{Hyp.}}{=}$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n-1} - r_2^{n-1}) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n + r_1^{n-1} - r_2^{n-1}) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n-1}(1 + r_1) - r_2^{n-1}(1 + r_2)) \overset{(*)}{=}$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n-1} * r_1^2 - r_2^{n-1} * r_2^2)) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1})$$

Beweis für Umformung (*):

$$r_1^2 = 1 + r_1$$
$$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{1+\sqrt{5}^2}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Analog dazu $r_2^2 = 1 + r_2$

Beispiel 9. a) Hypothese:

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$$

Induktionsbasis:
Induktionsschritt:

$$f_{n+m+1} \overset{\text{Rek.}}{=}$$
$$f_{n+m} + f_{n+m-1} \overset{\text{2xHyp.}}{=}$$
$$f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} + f_{n-2}f_m + f_{n-1}f_{m+1} =$$
$$f_{m+1}(f_n + f_{n-1}) + f_m(f_{n-2}f_{n-1}) \overset{\text{Rek.}}{=}$$
$$f_{m+1}f_{n+1} + f_m f_n$$

b) [1]
Hypothese:

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$$

[1] Dank an Julia Moser

$$\begin{aligned} f_{2n} &= \\ f_{n+n} &\overset{a)}{=} \\ f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} &= \\ f_n(f_{n-1} + f_{n+1}) & \end{aligned}$$

Hypothese:

$$f_n(f_{n-1} + f_{n+1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$$

Induktionsbasis:
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(f_n + f_{n+2}) &\overset{\text{Rek.}}{=} \\ f_{n+1}(f_n + f_n + f_{n+1}) &= \\ f_{n+1}(2f_n + f_{n+1}) &= \\ f_{n+1}^2 + 2f_n f_{n+1} + f_n^2 - f_n^2 &= \\ (f_{n+1} + f_n)^2 - f_n^2 &\overset{\text{Rek.}}{=} \\ f_{n+2}^2 - f_n^2 & \end{aligned}$$

c) [2]
Hypothese:

$$f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Induktionsbasis:
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 &\overset{\text{Rek.}}{=} \\ (f_n + f_{n-1})^2 &= \\ f_n^2 + 2f_n f_{n-1} + f_{n-1}^2 &= \\ f_n^2 + 2f_n f_{n-1} + f_{n-2}f_n + (-1)^n &\overset{\text{Hyp.}}{=} \\ f_n^2 + f_n(2f_{n-1} + f_{n-2}) + (-1)^n * 1 &= \\ f_n^2 + f_n(f_{n-1} + f_{n-1} + f_{n-2}) + (-1)^n * (-1)^2 &\overset{\text{Rek.}}{=} \\ f_n^2 + f_n(f_{n-1} + f_n) + (-1)^n * (-1)^2 &\overset{\text{Rek.}}{=} \\ f_n^2 + f_n f_{n+1} + (-1)^{n+2} &= \\ f_n(f_n + f_{n+1}) + (-1)^{n+2} &\overset{\text{Rek.}}{=} \\ f_n f_{n+2} + (-1)^{n+2} & \end{aligned}$$

Beispiel 10.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$$
$$(x+1)(x-1)(x-2) > 0$$

Vorzeichenuntersuchung für $-\infty$: -. D.h. Übergang bei Nullstellen, -1, 1, 2.
Im Interval $(-1, 1) \cup (2, \infty) > 0$

---

[2]Dank an Julia Moser

Beispiel 11.

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$$

Fallunterschiedung: $x < 2, x > 2, x < 1$ und $x > 1$. Da sich diese überlappen betrachtet man die Fälle: $x < 1, 1 < x < 2$ und $2 < x$.

$2 < x$:

$$\begin{aligned} x-2 &< 1+x-1 \\ -2 &< 0 \\ L_1 &= (2,\infty) \end{aligned}$$

$1 < x < 2$:

$$\begin{aligned} -x+2 &< 1+x-1 \\ 2 &< 2x \\ 1 &< x \\ L_2 &= (1,2) \end{aligned}$$

$x < 1$:

$$\begin{aligned} -x+2 &< 1-x+1 \\ 2 &< 0 \\ L_3 &= 0 \end{aligned}$$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$

Beispiel 12.

$$\frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$$

$x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{-x-1}{x^2-1} &\geq \frac{1}{2} \\ -\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} &\geq \frac{1}{2}, x \neq -1 \\ -\frac{1}{x-1} &\geq \frac{1}{2}, \\ x-1 &\geq -2 \\ x &\geq -1 L_1 = (-1,0) \end{aligned}$$

$x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^2-1} &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x+1} &\geq \frac{1}{2} x \neq -1 \\ x+1 &\leq 2 \\ x &\leq 1 \\ L_2 &= (0,1) \end{aligned}$$

Beispiel 13.

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\geq 2 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ (x-y)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 14.

$$\begin{aligned} 2xy &\leq \frac{1}{2}(x+y)^2 \\ 4xy &\leq (x+y)^2 \\ 4xy &\leq x^2 + 2xy + y^2 \\ 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\ 0 &\leq (x-y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+y)^2 &\leq x^2 + y^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &\leq 2x^2 + 2y^2 \\ 2xy &\leq x^2 + y^2 \\ 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\ 0 &\leq (x-y)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 15.

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &\geq xy(x+y) \\ x^3 + y^3 &\geq x^2y + xy^2 \\ x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 &\geq 2x^2y + 2xy^2 \\ x^2(x+y) + y^2(x+y) &\geq 2(x^2y + xy^2) \\ x^2(x+y) + y^2(x+y) &\geq 2xy(x+y), x+y \neq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} &\geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ x^3 + y^3 &\geq x^2y + xy^2 \end{aligned}$$

Beispiel 16.

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_n$$

Induktionsschritt:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}$$

$$[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)](1+x_{n+1}) \geq [\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)] + x_{n+1}$$

$$[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)] + [\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)]x_{n+1} \geq [\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)] + x_{n+1}$$

$$[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)]x_{n+1} \geq x_{n+1}$$

Für $x_{n+1} = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich wahr.

Für $x_{n+1} > 0$:

$$[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)]x_{n+1} \geq x_{n+1}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1$$

Letzteres gilt weil für alle x_i gilt:

$$x_i \geq 0$$

$$1 + x_i \geq 1$$

Multipliziert mal alle diese i Ungleichungen resultiert:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1$$

Für $-1 < x_{n+1} < 0$:

$$[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)]x_{n+1} \geq x_{n+1}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \leq 1$$

Letzteres gilt weil für alle x_i gilt:

$$-1 < x_i \leq 0$$

$$0 < 1 + x_i \leq 1$$

Multipliziert mal alle diese i Ungleichungen resultiert:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \leq 1$$

Die Bernoulli Ungleich erhält man durch setzen von $x_i = x$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x) \geq 1 + \overbrace{x + \cdots + x}^{nmal}$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beispiel 17. Laut der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)$$

Wählt man $a_k = 1$ und $b_k = \frac{1}{k}$ als Folgen, dann gilt:

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} * 1)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} 1)(\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k})^2)$$
$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} * 1)^2 \leq n(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$$

Ist beweisbar dass,

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}) < 2$$

Dann gilt auch,

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})^2 < 2n$$

Behauptung:

$$n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + n \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} < 2n$$

Beweis 1. Teil:

$$k > k-1$$
$$\frac{1}{k} < \frac{1}{k-1}$$
$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

Beweis 2. Teil:

Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{k(k-1)}$:

$$\frac{1}{k(k-1)} =$$
$$= \frac{k-k+1}{k(k-1)} =$$
$$= \frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)} =$$
$$= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$\frac{1}{k-1}$ durch die Partialbruchzerlegung ersetzt ergibt:

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}&<2\\
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}&<1\\
1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}&<1\\
1-\frac{1}{n}&<1\\
-\frac{1}{n}&<0
\end{aligned}
$$

□

b) analog zu a.)

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}*1\Big)^2 &\le \Big(\sum_{k=n+1}^{2n}1\Big)\Big(\sum_{k=n+1}^{2n}\big(\frac{1}{k}\big)^2\Big)\\
\Big(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}*1\Big)^2 &\le n\Big(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}\Big)
\end{aligned}
$$

D.h. die Behauptung gilt falls:

$$n\Big(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}\Big)\le\frac{1}{2}$$

Behauptung:

$$n\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}<n\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k(k-1)}<\frac{1}{2}$$

Beispiel 18. a)

3

2

1

-3 -2 -1 1 2 3

-1

-2

-3

b)

2

1

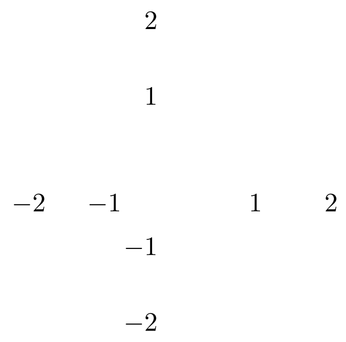
-2 -1 1 2

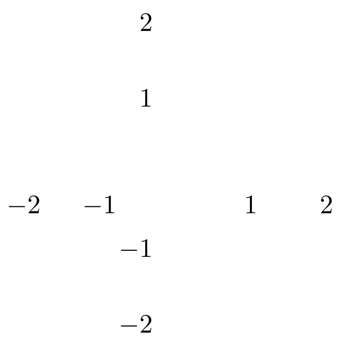
-1

-2

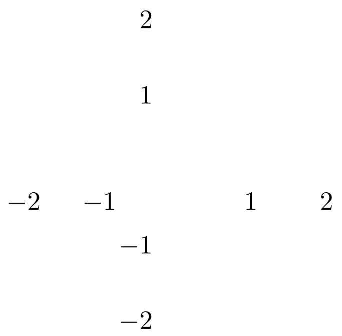
Beispiel 19. a)

Figure 1. 20. a)





b)



Beispiel 20.

Beispiel 21. p-adischer Systembruch a.k.a. Konvertierung in ein anderes Zahlensystem mit "Dezimal"stellen.

Für p=2: $\frac{1}{2} = 0.1_2$, $\frac{1}{3} = 0.\overline{01}_2$

FIGURE 2. 20. b)

2

1

−2 −1 1 2

−1

−2

Für p=5: $\frac{1}{2} = 0.\overline{2}_5$, $\frac{1}{3} = 0.13\overline{013}_5$
Für p=10: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

Beispiel 22. a) CRAP?

$$\frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)} =$$
$$\frac{n^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n^2})}{n^2(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})(3+\frac{1}{n^2})} =$$
$$\frac{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n^2})}{(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})(3+\frac{1}{n^2})} =$$

$$\frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)} =$$
$$\frac{n^3+n^2-n-1}{6n^3+3n^2+2n+1}$$
$$\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{6+3\frac{1}{n}+2\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \to \frac{1}{6}$$

b)

$$\frac{n+1}{n^2+1} =$$
$$\frac{n^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} =$$
$$\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1} = 0$$

c)

$$\frac{4^n+1}{5^n} =$$
$$\frac{4^n}{5^n} + \frac{1}{5^n} =$$
$$(\frac{4}{5})^n + (\frac{1}{5})^n \to 0$$

d)

$$\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} =$$
$$\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n^2}} \to$$
$$0 + (-1)^n * 1$$

Da $(-1)^n$ eine alternierende Folge ist gibt es keinen Grenzwert.

Beispiel 23.

$$x_n = \frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+b}-\sqrt{n}} =$$
$$\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+b}-\sqrt{n}} * \frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} * \frac{\sqrt{n+b}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+b}+\sqrt{n}} =$$
$$\frac{a(\sqrt{n+b}+\sqrt{n})}{b(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})} =$$
$$\frac{a\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{b}{n}}+1)}{b\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1)} \to$$
$$\frac{a(\sqrt{1+0}+1)}{b(\sqrt{1+0}+1)} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Beispiel 24. a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}) \frac{(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(n+a-n) \frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1} \to \frac{a}{2}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}) &= \\
\lim_{n\to\infty} n(\frac{\sqrt{n}-(\sqrt{n}+1)}{(\sqrt{n}+1)\sqrt{n}}) &= \\
\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{\sqrt{n}+n}) &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} &\to \\
\frac{1}{1+0} &= 1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &= \\
\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) * \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}})} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} &\to \\
\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} &= \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1) &= \\
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1) * \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} &= \\
\lim_{n\to\infty} n(1+\frac{1}{n} - 1) * \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} &\to \\
\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Beispiel 25.

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^1 0 - 1 \to (1+0)^1 0 - 1 = 0$$

$$x_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \overset{\text{siehe Bsp. 2}}{=}$$
$$\frac{1}{n^3}\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) =$$
$$\frac{1}{n^3}\frac{1}{3}(n^3+n^2+2n^2+2n) =$$
$$\frac{1}{3}(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}) \to \frac{1}{3}$$

Beispiel 26. $x_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$

$$3^n \le 2^n + 3^n \le 3^n + 3^n$$
$$\sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{2 * 3^n}$$
$$3 \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{2} * 3$$
$$\to 3 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} \le 3$$

Beispiel 27.

$$x_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$$
$$1 + n * \frac{-1}{n^2} \overset{\text{Bernoulli}}{\le} (1-\frac{1}{n^2})^n \le 1$$
$$1 - \frac{1}{n} \le (1-\frac{1}{n^2})^n \le 1$$
$$\to$$
$$1 \le \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n \le 1$$